第17講　不等式について

17

［A］ すべての正の数 x に対して不等式 $kx^2 \geqq \log x$ が成り立つような定数 k のうちで最小のものを求めよ．ただし，$\log x$ は自然対数である．

［B］ $0<a<b$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

ただし，対数は自然対数とする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　不等式について

17　$0<x<1$ のとき，不等式

$$\log\frac{1}{1-x^2}<\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2$$

が成り立つことを示せ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　不等式について

17

［A］　すべての正の数 x に対して不等式 $kx^2 \geqq \log x$ が成り立つような定数 k のうちで最小のものを求めよ．ただし，$\log x$ は自然対数である．

［B］　$0<a<b$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

ただし，対数は自然対数とする．

【答】［A］　$k=\dfrac{1}{2e}$

［B］　略

【解説】

［A］　$f(x)=kx^2-\log x$ とおくと，

$$f'(x)=2kx-\frac{1}{x}$$

ここで $k \leqq 0$ とすると

$$f(2)=4k-\log 2<0$$

より不適．よって $k>0$　このとき

$$f'(x)=\frac{2k}{x}\left(x^2-\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{2k}{x}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$$

より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最小	↗

となるので $f(x) \geqq 0$ となるためには

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) \geqq 0$$

$$\iff k\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)^2-\log\frac{1}{\sqrt{2k}} \geqq 0$$

$$\iff \frac{1}{2} \geqq \log\frac{1}{\sqrt{2k}}$$

$$\iff 1 \geqq \log\frac{1}{2k}$$

$$\iff \frac{1}{2k} \leqq e$$

$$\therefore\ k \geqq \frac{1}{2e}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，求める k の最小値は

$$\boldsymbol{k=\frac{1}{2e}}$$

［B］

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\log b-\log a}<\frac{a+b}{2}$$

$$\iff \sqrt{\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}-1}{\log\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}+1}{2}$$

$$\iff \frac{2\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\frac{a}{b}+1}>\log\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

よって $0<x<1$ において

$$\frac{2(x-1)}{x+1}>\log x>\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

を示せばよい.

$$f(x)=\log x-\frac{2(x-1)}{x+1}$$

とおくと

$$f(x)=\log x-2+\frac{4}{x+1}$$

より

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0\quad(0<x<1 \text{ より})$$

これと $f(1)=0$ より $0<x<1$ において $f(x)<0$

$$g(x)=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\log x$$

とおくと

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}>0\quad(0<x<1 \text{ より})$$

これと $g(1)=0$ より $0<x<1$ において $g(x)<0$　よって，

$$\frac{2(x-1)}{x+1}>\log x>\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　不等式について

17　$0<x<1$ のとき，不等式

$$\log\frac{1}{1-x^2}<\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2$$

が成り立つことを示せ.

【答】　略

【解説】

$f(x)=\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2-\log\frac{1}{1-x^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}f(x)&=\{-\log(1-x)\}^2+\log(1-x)(1+x)\\&=\{\log(1-x)\}^2+\log(1-x)+\log(1+x)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\log(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}+\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\\&=-\frac{2}{1-x}\log(1-x)-\frac{2x}{1-x^2}\\&=-\frac{2}{1-x}\left\{\log(1-x)+\frac{x}{1+x}\right\}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}g(x)&=\log(1-x)+\frac{x}{1+x}\\&=\log(1-x)+1-\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{(x+1)^2}\\&=\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)^2}<0\quad(0<x<1\text{ より})\end{aligned}$$

$g(0)=0$ より $g(x)<0$　よって $f'(x)>0$

これと $f(0)=0$ より $f(x)>0$　よって示された.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。